4

Líneas paralelas, distancias y suma de ángulos

4.1 LÍNEAS PARALELAS

Líneas paralelas son líneas rectas que están en el mismo plano y que no se intersectan a sí mismas, sin importar qué tan lejos se extiendan. El símbolo para la condición de paralelismo es $\parallel$; así, el símbolo $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ significa: "la línea $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a la línea $\overleftrightarrow{CD}$". En los diagramas, el uso de flechas es para indicar que las líneas son paralelas (Fig. 4-1).

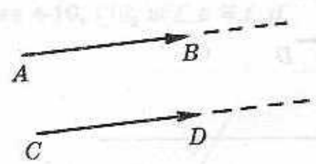


Fig. 4-1

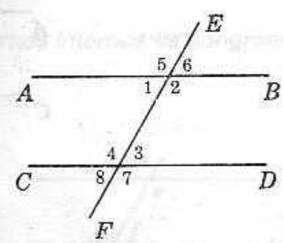


Fig. 4-2

Una *transversal* a dos o más líneas es aquélla que las corta. Así, en la figura 4-2, $\overleftrightarrow{EF}$ es una transversal de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

Los *ángulos internos* formados por dos líneas cortadas por una transversal, son los ángulos entre las dos líneas, mientras que los *ángulos externos* son aquéllos que están por fuera de las líneas. Por lo tanto, de los ocho ángulos formados por $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ cortadas por $\overleftrightarrow{EF}$ en la figura 4-2, los ángulos internos son $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$; los ángulos externos son $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ y $\angle 8$.

4.1A Pares de ángulos formados por dos líneas cortadas por una transversal

Los *ángulos correspondientes* de dos líneas cortadas por una transversal, son los ángulos situados en el mismo lado de la transversal y en el mismo lado de las líneas. En la figura 4-3, $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos correspondientes de las líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{EF}$. Nótese en este caso, que ambos ángulos están a la derecha de la transversal y abajo de las líneas.

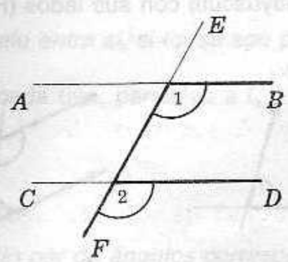


Fig. 4-3

Cuando dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, los lados de dos ángulos correspondientes forman una F mayúscula en distintas posiciones, tal y como se muestra en la figura 4-4.

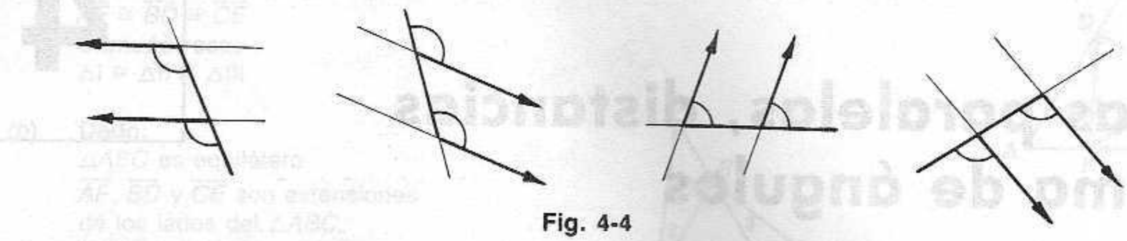


Fig. 4-4

Los *ángulos alternos internos* de dos líneas cortadas por una transversal, son los dos ángulos no adjuntos entre las dos líneas y en lados opuestos a la transversal. Así, $\angle 1$ y $\angle 2$ en la figura 4-5 son ángulos alternos internos de las

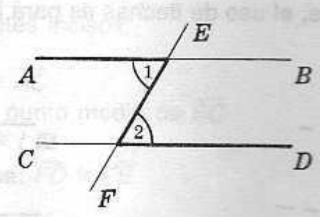


Fig. 4-5

líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{EF}$. Cuando dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, los lados de dos ángulos alternos internos forman una Z o una N mayúsculas en distintas posiciones, tal y como se muestra en la figura 4-6.

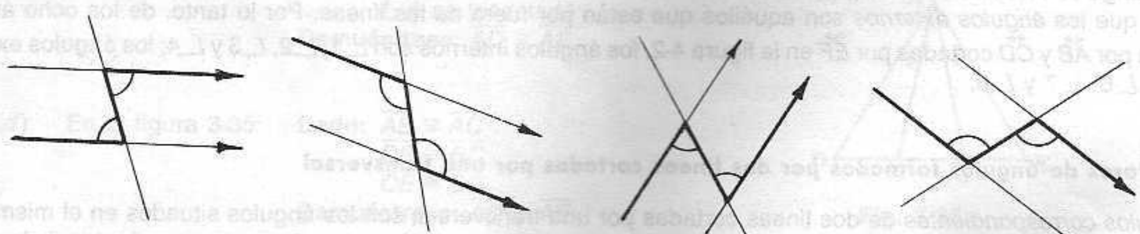


Fig.4-6

Cuando dos líneas paralelas son cortadas por una transversal *los ángulos internos del mismo lado de la transversal* se localizan muy fácil porque forman una U mayúscula con sus lados (Fig. 4-7).

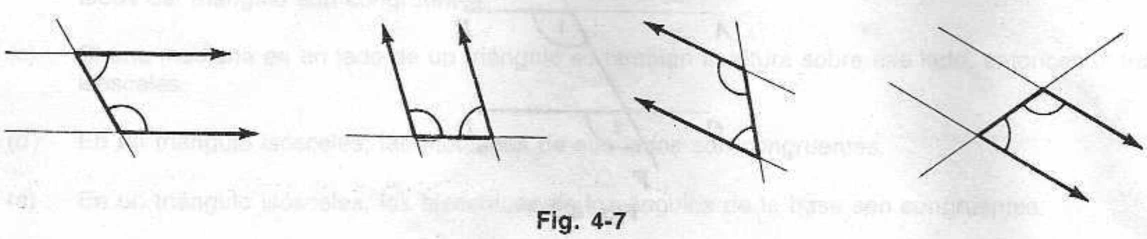


Fig. 4-7

4.1B Principios sobre líneas paralelas

PRINCIPIO 1: *a través de un punto dado que no esté en una recta dada, puede dibujarse una y sólo una paralela a la línea dada.* (Postulado de las líneas paralelas)

Por consiguiente, en la figura 4-8, ya sea l_1 o l_2, pero no ambas, puede ser paralela a l_3.

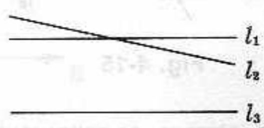


Fig. 4-8

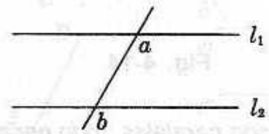


Fig. 4-9

Demostración de que dos líneas son paralelas

PRINCIPIO 2: *dos líneas son paralelas si un par de ángulos correspondientes es congruente.*

Por eso, en la figura 4-9, $l_1 \| l_2$ si $\angle a \cong \angle b$.

PRINCIPIO 3: *dos líneas son paralelas si un par de ángulos alternos internos es congruente.*

Así, en la figura 4-10, $l_1 \| l_2$ si $\angle c \cong \angle d$.

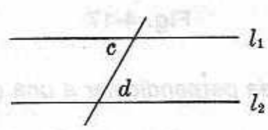


Fig. 4-10

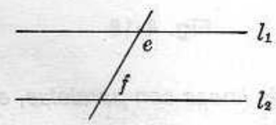


Fig. 4-11

PRINCIPIO 4: *dos líneas son paralelas si dos ángulos internos del mismo lado de la transversal son suplementarios.*

En la figura 4-11, $l_1 \| l_2$ si $\angle e$ y $\angle f$ son suplementarios.

PRINCIPIO 5: *un conjunto de líneas es paralelo a una misma línea si todas son perpendiculares a ella. (Las perpendiculares a una misma línea son paralelas.)*

Por eso, en la figura 4-12, $l_1 \| l_2$ y l_1 y l_2 son perpendiculares a l_3.

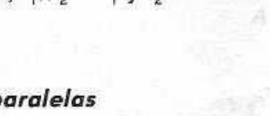


Fig. 4-12

Fig. 4-13

PRINCIPIO 6: *un conjunto de líneas es paralelo entre sí, si todas son paralelas a una misma línea. (Líneas paralelas a la misma línea, son paralelas entre sí.)*

Así, en la figura 4-13, $l_1 \| l_2$ si l_1 y l_2 son cada una, paralelas a l_3.

Propiedades de líneas paralelas

PRINCIPIO 7: *si dos líneas son paralelas, todo par de ángulos correspondientes es congruente. (Ángulos correspondientes de líneas paralelas son congruentes.)*

En la figura 4-14, si $l_1 || l_2$, entonces $\angle a \cong \angle b$.

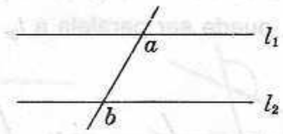


Fig. 4-14

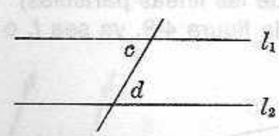


Fig. 4-15

Principio 8: *si dos líneas son paralelas, todo par de ángulos alternos internos, es congruente. (Los ángulos alternos internos de líneas paralelas son congruentes.)*

En consecuencia, en la figura 4-15, si $l_1 || l_2$ entonces $\angle c \cong \angle d$.

Principio 9: *si dos líneas son paralelas, entonces los ángulos internos del mismo lado de la transversal son suplementarios.*

Por eso, en la figura 4-16, si $l_1 || l_2$, $\angle e$ y $\angle f$ son suplementarios.

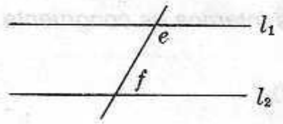


Fig. 4-16

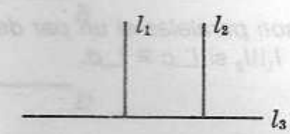


Fig. 4-17

Principio 10: *si dos o más líneas son paralelas, entonces una línea perpendicular a una de ellas es perpendicular también a las otras.*

En la figura 4-17 si $l_1 || l_2$ y $l_3 \perp l_1$, entonces $l_3 \perp l_2$.

Principio 11: *si dos o más líneas son paralelas entre sí, entonces una línea paralela a alguna de ellas también lo es de las otras.*

Así, en la figura 4-18, si $l_1 || l_2$ y $l_3 || l_1$, entonces $l_3 || l_2$.

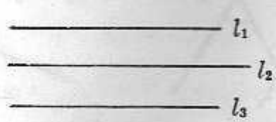


Fig. 4-18

Principio 12: *si los lados de dos ángulos son respectivamente paralelos entre sí, entonces ya sea que los ángulos son congruentes o son suplementarios.*

En la figura 4-19, si $l_1 || l_3$ y $l_2 || l_4$, entonces $\angle a \cong \angle b$ y también $\angle a$ y $\angle c$ son suplementarios.

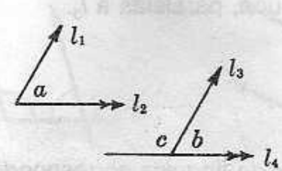


Fig. 4-19

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1 Aplicaciones Numéricas de Líneas Paralelas

En cada parte de la figura 4-20, encuentre la medida x y la medida y de los ángulos indicados.

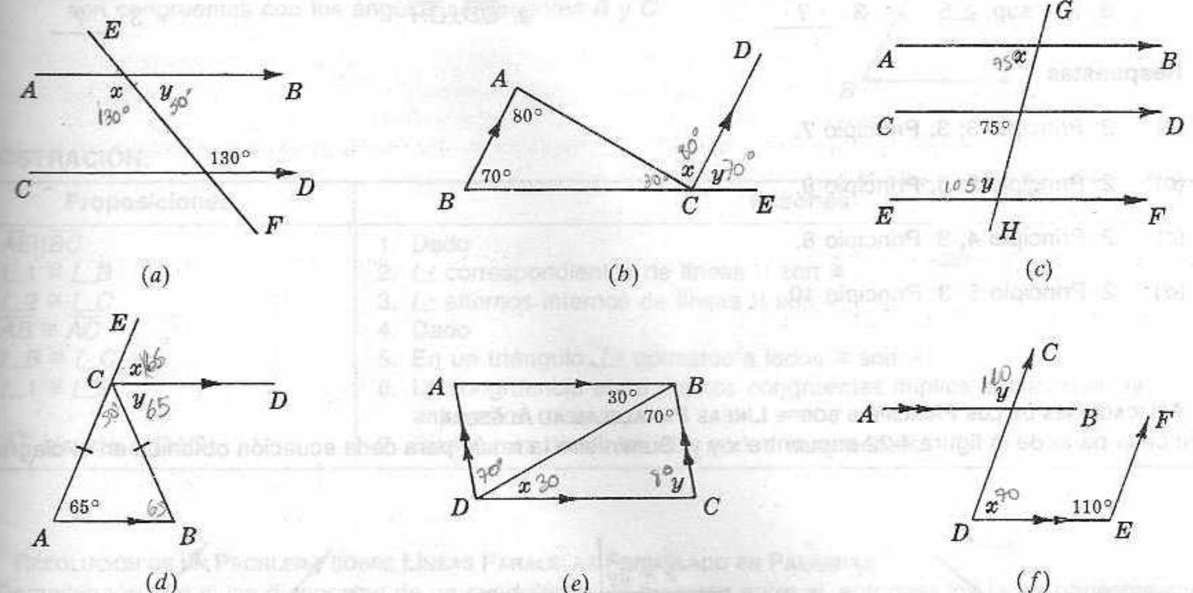


Fig. 4-20

Respuestas

(a) $x = 130°$ (principio 8). $y = 180° - 130° = 50°$ (principio 9).

(b) $x = 80°$ (principio 8). $y = 70°$ (principio 7).

(c) $x = 75°$ (principio 7). $y = 180° - 75° = 105°$ (principio 9).

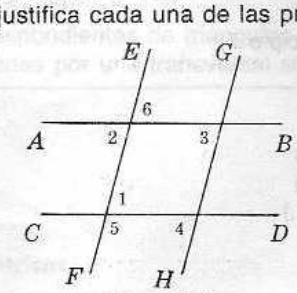
(d) $x = 65°$ (principio 7). Dado que $m\angle B = m\angle A$, $m\angle B = 65°$. En consecuencia $y = 65°$ (principio 8).

(e) $x = 30°$ (principio 8). $y = 180° - (30° + 70°) = 80°$ (principio 9).

(f) $x = 180° - 110° = 70°$ (principio 9). $y = 110°$ (principio 12).

4.2 Aplicación de los Principios sobre Líneas paralelas y sus Conversos

Las siguientes demostraciones breves se refieren a la figura 4-21. En cada una se da la primera proposición. Diga con qué principio sobre líneas paralelas se justifica cada una de las proposiciones restantes.



2-6 op. vert.
1-3 compl.
2-1 alt int.

Fig. 4-21

(*a*) 1. $\angle 1 \cong \angle 2$ — 1. Dado
2. $AB \parallel CD$ — 2. ___?___
3. $\angle 3 \cong \angle 4$ — 3. ___?___

(*b*) 1. $\angle 2 \cong \angle 3$ — 1. Dado
2. $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ — 2. ___?___
3. $\angle 4$ sup. $\angle 5$ — 3. ___?___

(*c*) 1. $\angle 5$ sup. $\angle 4$ — 1. Dado
2. $EF \parallel GH$ — 2. ___?___
3. $\angle 3 \cong \angle 6$ — 3. ___?___

(*d*) 1. $\overline{EF} \perp \overline{AB}$, $\overline{GH} \perp \overline{AB}$, $\overline{EF} \perp \overline{CD}$ — 1. Dado
2. $\overline{EF} \parallel \overline{GH}$ — 2. ___?___
3. $\overline{CD} \perp \overline{GH}$ — 3. ___?___

Respuestas

(*a*) 2: Principio 3; 3: Principio 7.

(*b*) 2: Principio 2; 3: Principio 9.

(*c*) 2: Principio 4; 3: Principio 8.

(*d*) 2: Principio 5; 3: Principio 10.

4.3 Aplicaciones de los Principios sobre Líneas Paralelas al Álgebra

En cada parte de la figura 4-22 encuentre x y y. Suministre la razón para cada ecuación obtenida en el diagrama.

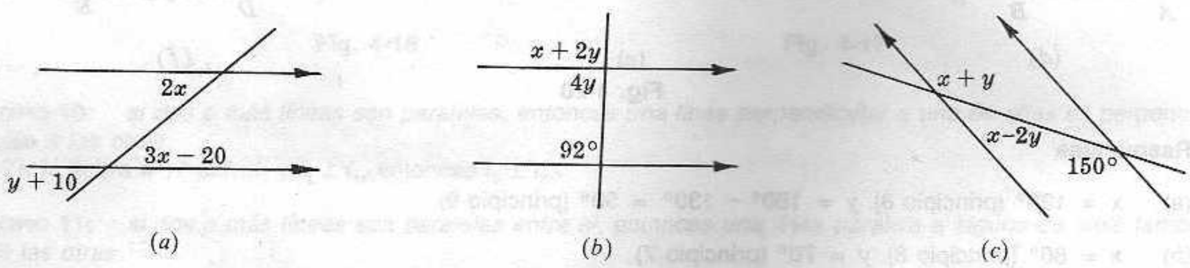


Fig. 4-22

Respuestas

(*a*)
$$3x - 20 = 2x \quad \text{(principio 8)}$$
$$x = 20°$$
$$y + 10 = 2x \quad \text{(principio 7)}$$
$$y + 10 = 40$$
$$y = 30°$$

(*b*)
$$4y = 180 - 92 = 88 \quad \text{(principio 9)}$$
$$y = 22°$$
$$x + 2y = 92 \quad \text{(principio 7)}$$
$$x + 44 = 92$$
$$x = 48°$$

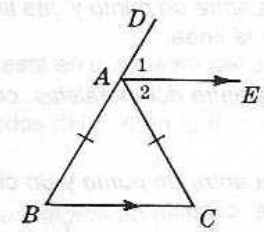
(*c*)
$$(1) \quad x + y = 150 \quad \text{(principio 8)}$$
$$(2) \quad x - 2y = 30 \quad \text{(principio 9)}$$
$$3y = 120 \quad \text{(Post. Subs.)}$$
$$y = 40°$$
$$x + 40 = 150$$
$$x = 110°$$

4.4 RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE LÍNEAS PARALELAS

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
$\overrightarrow{AE} \parallel \overline{BC}$

Demuéstrese: $\overrightarrow{AE}$ bisecta $\angle DAC$

Plan: Demuéstrese que los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes con los ángulos congruentes *B* y *C*.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overrightarrow{AE} \parallel \overline{BC}$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle B$	2. $\angle$s correspondientes de líneas $\parallel$ son $\cong$.
3. $\angle 2 \cong \angle C$	3. $\angle$s alternos internos de líneas $\parallel$ son $\cong$.
4. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	4. Dado
5. $\angle B \cong \angle C$	5. En un triángulo, $\angle$s opuestos a lados $\cong$ son $\cong$.
6. $\angle 1 \cong \angle 2$	6. La congruencia entre objetos congruentes implica la congruencia entre ellos mismos.
7. $\overrightarrow{AE}$ bisecta $\angle DAC$.	7. Bisectar es dividir en dos partes congruentes.

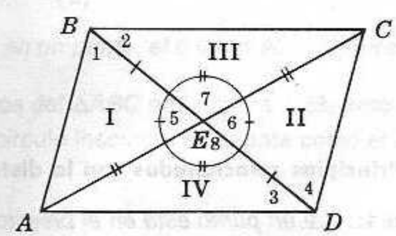
4.5 RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE LÍNEAS PARALELAS FORMULADO EN PALABRAS

Demuéstrese que si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan entre sí, entonces los lados opuestos son paralelos.

Dado: *ABCD* un cuadrilátero
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisectan entre sí.

Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

Plan: Demuéstrese que $\angle 1 \cong \angle 4$ probando que $\triangle I \cong \triangle II$.
Demuéstrese que $\angle 2 \cong \angle 3$ probando que $\triangle III \cong \triangle IV$.



DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Razones
1. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisectan	1. Dado
2. $\overline{BE} \cong \overline{ED}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$	2. Bisectar es dividir en dos partes congruentes.
3. $\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$	3. $\angle$s verticales son $\cong$.
4. $\triangle I \cong \triangle II$, $\triangle III \cong \triangle IV$	4. $\angle$s supl. $\cong$ $\angle$s supl.
5. $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 2 \cong \angle 3$	5. Partes correspondientes de triángulos congruentes son $\cong$.
6. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	6. Líneas cortadas por una transversal son $\parallel$ si los $\angle$s alternos internos son $\cong$.

4.2 DISTANCIAS

4.2A Distancias entre dos figuras geométricas

La distancia entre dos figuras geométricas es el *segmento de línea recta más corto entre las figuras.*

1. La distancia *entre dos puntos* P y Q en la figura 4-23(*a*), es el segmento de línea $\overline{PQ}$ entre ellos.
2. La distancia *entre un punto y una línea*, como P y $\overleftrightarrow{AB}$ en (*b*), es el segmento de línea PQ; esto es, la perpendicular del punto a la línea.
3. La distancia *entre dos paralelas*, como $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ en (*c*), es el segmento PQ; esto es, una perpendicular entre las paralelas.
4. La distancia *entre un punto y un círculo*, como P y el círculo O en (*d*), es $\overline{PQ}$; esto es, el segmento de $\overline{OP}$ entre el punto y el círculo.
5. La distancia *entre dos círculos concéntricos*, como los dos círculos cuyo centro es O, en (*e*), es $\overline{PQ}$, el segmento del radio mayor entre los dos círculos.

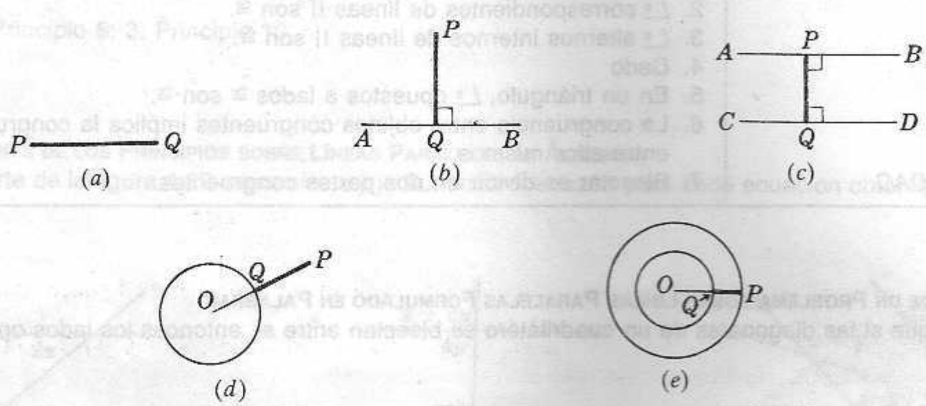


Fig. 4-23

4.2B Principios relacionados con la distancia

PRINCIPIO 1: *si un punto está en el bisector perpendicular de un segmento de línea, entonces es equidistante de los extremos del segmento.*

Esto es, si P está en $\overleftrightarrow{CD}$, el bisector $\perp$ de $\overline{AB}$ en la figura 4-24, es entonces $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

PRINCIPIO 2: *si un punto es equidistante de los extremos de un segmento de línea, entonces está en el bisector perpendicular al segmento de línea.* (El principio 2 es el converso del principio 1.)

En la figura 4-24, si $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ entonces P está en $\overleftrightarrow{CD}$, el bisector $\perp$ de $\overline{AB}$.

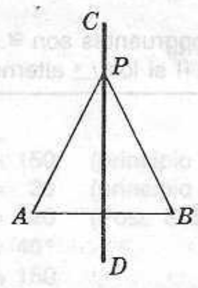


Fig. 4-24

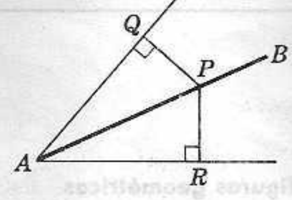


Fig. 4-25

PRINCIPIO 3: *si un punto está en el bisector de un ángulo, entonces es equidistante a los lados del ángulo.*

Por lo tanto, si P está en $\overleftrightarrow{AB}$, el bisector del $\angle A$ en la figura 4-25, entonces $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$, donde PQ y PR son las distancias de P a los lados del ángulo.

PRINCIPIO 4: *si un punto es equidistante de los lados de un ángulo, entonces está en el bisector del ángulo.* (El principio 4 es el converso del principio 3.)

Por lo cual, si $PQ = PR$, donde PQ y PR son las distancias de P a los lados del $\angle A$ en la figura 4-25, entonces P está en $\overleftrightarrow{AB}$, el bisector de $\angle A$.

PRINCIPIO 5: *dos puntos, cada uno de ellos equidistante de los extremos de un segmento de línea, determinan al bisector perpendicular del segmento de línea.* (La línea que une los vértices de dos triángulos isósceles, con base común, es el bisector perpendicular de la base.)

De este modo, si $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ y $\overline{QA} \cong \overline{QB}$ en la figura 4-26, entonces P y Q determinan $\overleftrightarrow{CD}$, el bisector $\perp$ de $\overline{AB}$.

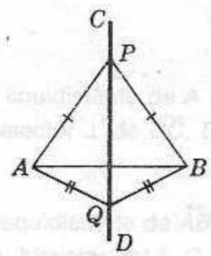


Fig. 4-26

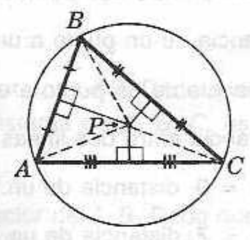


Fig. 4-27

PRINCIPIO 6: *los bisectores perpendiculares de los lados de un triángulo se cruzan en un punto, el cual es equidistante a los vértices del triángulo.*

Así si P es la intersección de las bisectrices del $\triangle ABC$ en la figura 4-27, entonces $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC}$. P es el centro del círculo circunscrito y se le denomina *circuncentro* del $\triangle ABC$.

PRINCIPIO 7: *las bisectrices de los ángulos de un triángulo se encuentran en un punto, el cual es equidistante respecto de los lados del triángulo.*

De esta manera, si Q es la intersección de los bisectores de los ángulos del $\triangle ABC$ en la figura 4-28, entonces $\overline{QR} \cong \overline{QS} \cong \overline{QT}$, las distancias de Q a los lados del $\triangle ABC$. Q es el centro del círculo inscrito y se denota como el *incentro* del $\triangle ABC$.

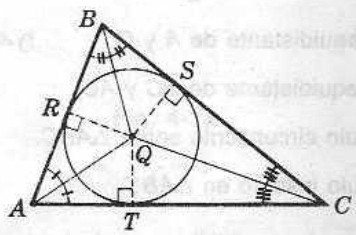


Fig. 4-28

PROBLEMAS RESUELTOS

4.6 DETERMINACIÓN DE DISTANCIAS

A continuación, encuéntrese la distancia e indíquese el tipo de distancia del que se trata. En la figura 4-29(*a*) de P a A; (*b*) de P a $\overleftrightarrow{CD}$; (*c*) de A a $\overleftrightarrow{BC}$; (*d*) de $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$. En la figura 4-29(*b*), encuéntrese la distancia (*e*) de P al círculo interior O; (*f*) de P al círculo exterior O; (*g*) entre los círculos concéntricos.

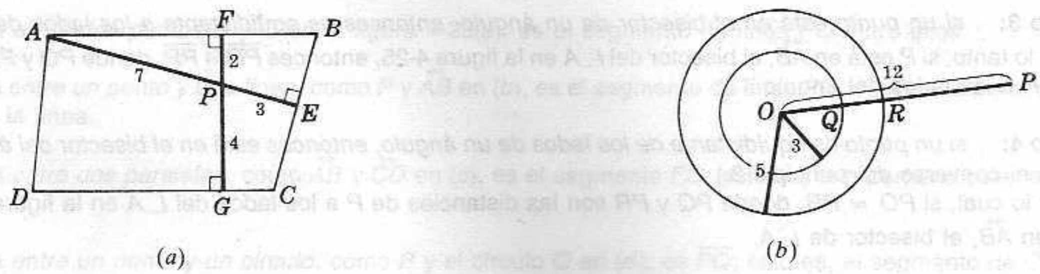


Fig. 4-29

Respuestas

(a) $PA = 7$, distancia entre dos puntos.

(b) $PG = 4$, distancia de un punto a una línea.

(c) $AE = 10$, distancia de un punto a una línea.

(d) $FG = 6$, distancia entre dos líneas paralelas.

(e) $PQ = 12 - 3 = 9$, distancia de un punto a un círculo.

(f) $PR = 12 - 5 = 7$, distancia de un punto a un círculo.

(g) $QR = 5 - 3 = 2$, distancia entre dos círculos concéntricos.

4.7 Localización de un Punto que Satisfaga Condiciones Preestablecidas

En la figura 4-30:

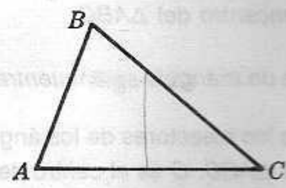


Fig. 4-30

(a) Localice P, un punto en $\overleftrightarrow{BC}$ equidistante de A y C.

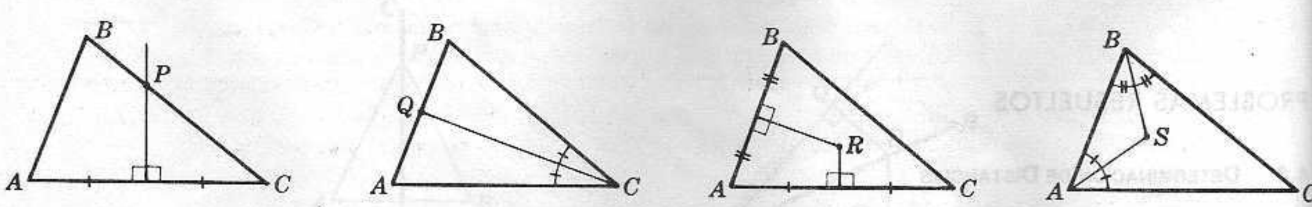
(b) Localice Q, un punto en $\overleftrightarrow{AB}$ equidistante de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

(c) Localice R, el centro del círculo circunscrito sobre $\triangle ABC$.

(d) Localice S, el centro del círculo inscrito en $\triangle ABC$.

Respuestas

Véase la figura 4-31.



(a) Utilice el principio 1 (b) Utilice el principio 3 (c) Utilice el principio 6 (d) Utilice el principio 7

Fig. 4-31

4.8 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 2 Y 4

Para cada $\triangle ABC$ en la figura 4-32, describa a P, Q y R como puntos equidistantes y localícelos sobre un bisector.

Fig. 4-32

Respuestas

(*a*) Dado que P es equidistante de A y B, está en el bisector $\perp$ de AB. Dado que Q es equidistante de B y C, está en el bisector $\perp$ de $\overline{BC}$. Dado que R es equidistante de A, B, C, está en los bisectores $\perp$ de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

(*b*) Dado que P es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, está en el bisector del $\angle B$. Dado que Q es equidistante de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, está en el bisector del $\angle C$. Dado que R es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, está en los bisectores de los $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

4.9 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 1, 3, 6 Y 7

Para todo $\triangle ABC$ de la figura 4-33, describa a P, Q, R como puntos equidistantes. También describa a R como el centro de un círculo.

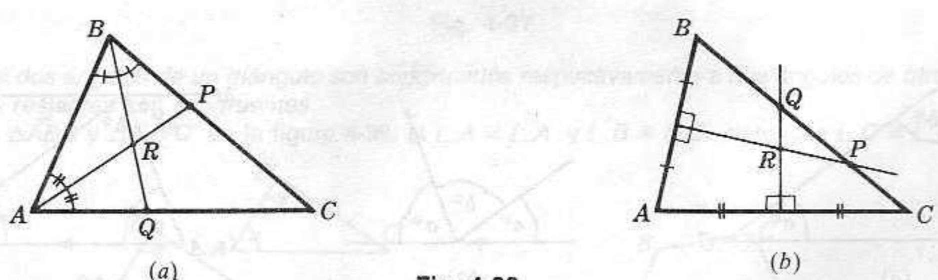


Fig. 4-33

Respuestas

(*a*) Dado que P está en el bisector del $\angle A$, es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. Dado que Q está en el bisector de $\angle B$, es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Dado que R está en los bisectores de $\angle A$ y $\angle B$, es equidistante de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. R es el incentro del $\triangle ABC$, esto es, el centro de su círculo inscrito.

(*b*) Dado que P está en el bisector $\perp$ de $\overline{AB}$, es equidistante de A y B. Dado que Q está en el bisector $\perp$ de $\overline{AC}$, es equidistante de A y C. Dado que R está en los bisectores $\perp$ de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es equidistante de A, B y C. R es el circuncentro de $\triangle ABC$, esto es, es el centro de su círculo circunscrito.

4.10 APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS 1, 3, 6 Y 7

En cada parte de la figura 4-34, encuentre dos puntos equidistantes a los extremos de un segmento de línea y también el bisector perpendicular determinado por los dos puntos.

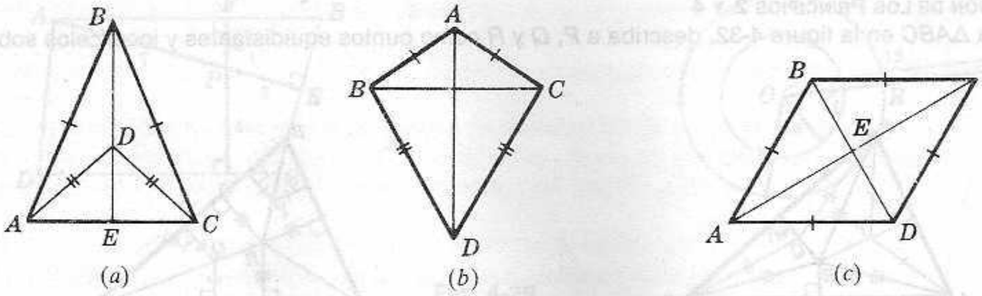


Fig. 4-34

Respuestas

(*a*) B y D son equidistantes de A y C. Por lo tanto $\overline{BE}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{AC}$.

(*b*) A y D son equidistantes de B y C. Por lo tanto $\overline{AD}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{BC}$.

(*c*) B y D son equidistantes de A y C; por lo tanto $\overline{BD}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{AC}$. A y C son equidistantes de B y D; por lo tanto $\overline{AC}$ es el bisector $\perp$ de $\overline{BD}$.

4.3 SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

Los ángulos de cualquier triángulo pueden separarse como en la figura 4-35(*a*) y en seguida colocarlos juntos como se muestra en (*b*). Los tres ángulos forman un ángulo derecho.

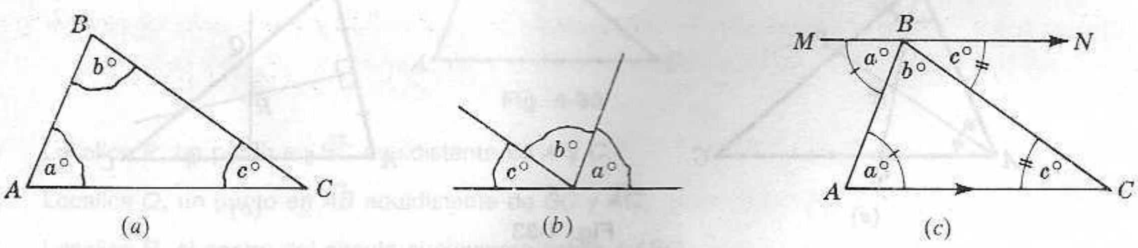


Fig. 4-35

Es posible demostrar que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a 180°, mediante el trazado de una línea que pase por uno de los vértices del triángulo y que sea paralela al lado opuesto del vértice en cuestión. En la figura 4-35(*c*), $\overleftrightarrow{MN}$ se traza por B y es paralela a AC. Nótese que la medida del ángulo derecho en B es igual a la suma de las medidas de los ángulos del $\triangle ABC$; esto es, $a° + b° + c° = 180°$. Cada par de ángulos congruentes es un par de ángulos alternos internos de líneas paralelas.

4.3A Ángulos internos y externos de un polígono

Se forma un ángulo externo en un polígono, siempre que uno de sus lados se extienda por el vértice. Si cada uno de los lados de un polígono se extiende como se muestra en la figura 4-36, puede observarse la formación de un ángulo externo en cada vértice. Cada uno de los ángulos externos es suplementario de su ángulo interno adjunto.

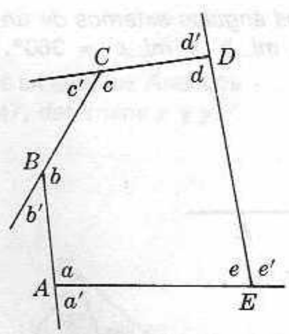


Fig. 4-36

Así, en el caso del pentágono *ABCDE* habrá cinco ángulos externos, uno en cada vértice. Nótese que cada ángulo externo es el suplemento de un ángulo interno adjunto. Por ejemplo: $m\angle a + m\angle a' = 180°$.

4.3B Principios sobre la suma de las medidas de ángulos

PRINCIPIO 1: *la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo derecho, esto es, a* 180°.
Así, en el $\triangle ABC$ de la figura 4-37, $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$.

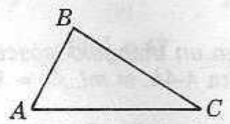


Fig. 4-37

PRINCIPIO 2: *si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente a dos ángulos de otro triángulo, entonces los ángulos restantes son congruentes.*
Así, en los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ en la figura 4-38, si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces $\angle C \cong \angle C'$.

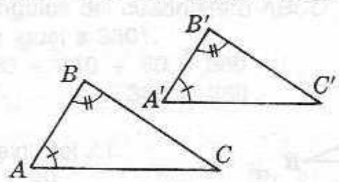


Fig. 4-38

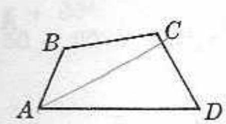


Fig. 4-39

PRINCIPIO 3: *la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es igual a* 360°.
En el cuadrilátero *ABCD* (Fig. 4-39), $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360°$.

PRINCIPIO 4: *la medida de cada ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de sus dos ángulos internos no adjuntos.*
En el $\triangle ABC$ de la figura 4-40, $m\angle ECB = m\angle A + m\angle B$.

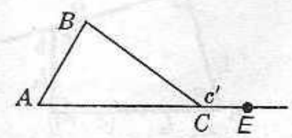


Fig. 4-40

PRINCIPIO 5: *la suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es igual a 360°.*
En el $\triangle ABC$ de la figura 4-41, $m\angle a' + m\angle b' + m\angle c' = 360°$.

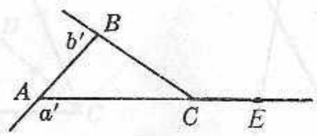


Fig. 4-41

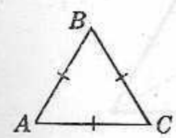


Fig. 4-42

PRINCIPIO 6: *la medida de todo ángulo de un triángulo equilátero es de 60°.*
Así el $\triangle ABC$ en la figura 4-42 es equilátero, entonces $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 60°$ y $m\angle C = 60°$.

PRINCIPIO 7: *los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.*
Así en el $\triangle$ rectángulo ABC de la figura 4-43, si $m\angle C = 90°$, entonces $m\angle A + m\angle B = 90°$.

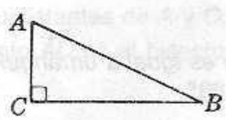


Fig. 4-43

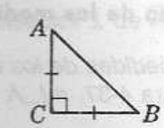


Fig. 4-44

PRINCIPIO 8: *la medida de todo ángulo agudo en un triángulo isósceles es igual a 45°.*
En el $\triangle$ rectángulo isósceles ABC de la figura 4-44, si $m\angle C = 90°$, entonces $m\angle A = 45°$ y $m\angle B = 45°$.

PRINCIPIO 9: *un triángulo no puede tener más que un ángulo recto.*
Así en el $\triangle$ rectángulo ABC de la figura 4-43, si $m\angle C = 90°$ entonces $\angle A$ y $\angle B$ no pueden ser $\angle$s rectos.

PRINCIPIO 10: *un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso.*
En el $\triangle ABC$ obtuso de la figura 4-45, si $\angle C$ es obtuso entonces $\angle A$ y $\angle B$ no pueden ser ángulos obtusos.

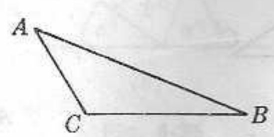


Fig. 4-45

PRINCIPIO 11: *dos ángulos son congruentes o suplementarios si sus lados son respectivamente perpendiculares entre sí.*
En la figura 4-46, si $l_1 \perp l_3$ y $l_2 \perp l_4$ entonces $\angle a \cong \angle b$ y $\angle a$ y $\angle c$ son suplementarios.

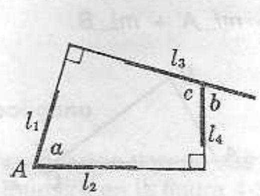


Fig. 4-46

PROBLEMAS RESUELTOS

4.11 EJEMPLOS NUMÉRICOS DE LOS PRINCIPIOS DE LA SUMA DE ÁNGULOS

En cada uno de los incisos de la figura 4-47, determine x y y.

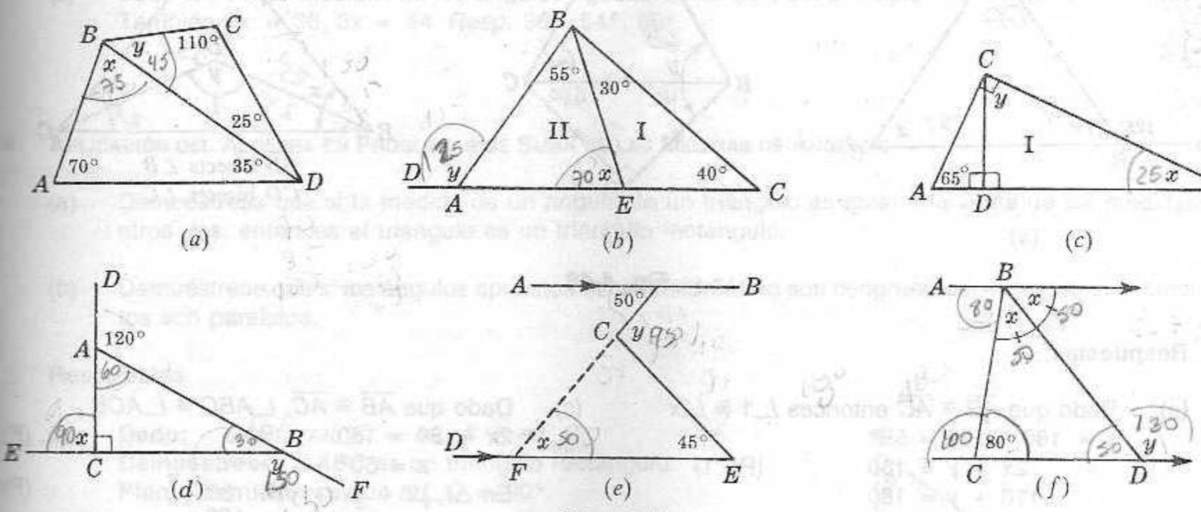


Fig. 4-47

Respuestas

(*a*) $x + 35 + 70 = 180$ (Pr. 1)
$x = 75°$
$y + 110 + 25 = 180$ (Pr. 1)
$y = 45°$

Verificación: la suma de las medidas de los ángulos del cuadrilátero *ABCD* debe ser igual a 360°.
$70 + 120 + 110 + 60 \stackrel{?}{=} 360$
$360 = 360$

(*b*) x es $\angle$ ext. del $\triangle$I.
$x = 30 + 40$ (Pr. 4)
$x = 70°$
y es $\angle$ ext. del $\triangle ABC$
$y = m\angle B + 40$ (Pr. 4)
$y = 85 + 40 = 125°$

(*c*) En el $\triangle ABC$, $x + 65 = 90$ (Pr. 7)
$x = 25°$
En el $\triangle$I, $x + y = 90$ (Pr. 7)
$25 + y = 90$
$y = 65°$

(*d*) Dado que $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{EB}$, $x = 90$
$x + y + 120 = 360$ (Pr. 5)
$90 + y + 120 = 360$
$y = 150°$

(*e*) Dado que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $x = 50$
$y = x + 45$ (Pr. 4)
$y = 50 + 45 = 95°$

(*f*) Dado que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $2x + 80 = 180$
$2x = 100$
$x = 50°$
$y = x + 80°$ (Pr. 4)
$y = 50 + 80 = 130°$

4.12 Aplicación de los Principios de Suma de las Medidas de Ángulos a Triángulos Isósceles y Equiláteros
Determínese x y y en cada inciso de la figura 4-48.

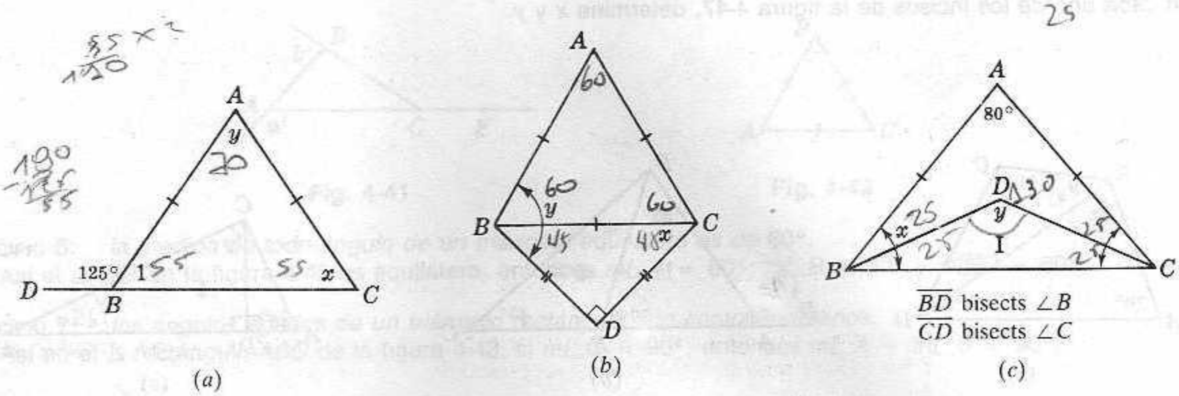


Fig. 4-48

Respuestas

(*a*) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ entonces $\angle 1 \cong \angle x$

$x = 180 - 125 = 55°$

$2x + y = 180$ (Pr. 1)

$110 + y = 180$

$y = 70°$

(*b*) Del Pr. 8, $x = 45°$

Dado que $m\angle ABC = 60°$ (Pr. 6)

y $m\angle CBD = 45°$ (Pr. 8)

$y = 60 + 45 = 105°$

(*c*) Dado que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle ABC \cong \angle ACB$

$2x + 80 = 180$ (Pr. 1

$x = 50°$

En ΔI, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + y = 180$ (Pr. 1

$x + y = 180$

$50 + y = 180$

$y = 130°$

4.13 Aplicación de Razones a la Suma de Medidas de Ángulos
Determínese la medida de cada ángulo.

(*a*) De un triángulo si las medidas de sus ángulos están en la proporción 3:4:5 [Fig. 4-49(*a*)]

(*b*) De un cuadrilátero si las medidas de sus ángulos están en la proporción 3:4:5:6 [(*b*)]

(*c*) De un triángulo recto si la proporción de las medidas de sus ángulos agudos es de 2:3 [(*c*)]

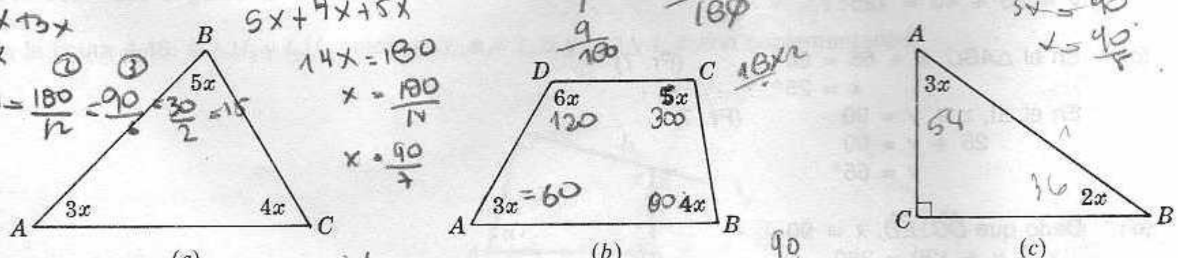


Fig. 4-49

Respuestas

(*a*) Sean $3x$, $4x$ y $5x$ las medidas de los ángulos. Entonces, del principio 1: $12x = 180$, por lo que $x = 15$. También $3x = 45$, $4x = 60$ y $5x = 75$. *Resp.* 45°, 60°, 75°.

(*b*) Sean $3x$, $4x$, $5x$ y $6x$ las medidas de los ángulos. Entonces, del principio 3: $18x = 360$, por lo que $x = 20$. También $3x = 60$, $4x = 80$, etc. *Resp.* 60°, 80°, 100°, 120°.

(*c*) Sean $2x$, $3x$ las medidas de los ángulos agudos. Entonces, del principio 7: $5x = 90$, por lo que $x = 18$. También $2x = 36$, $3x = 54$. *Resp.* 36°, 54°, 90°.

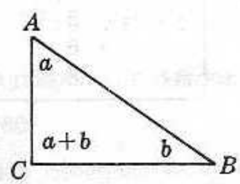
4.14 Aplicación del Álgebra en Problemas de Suma de las Medidas de Ángulos

(*a*) Demuéstrese que si la medida de un ángulo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los otros dos, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

(*b*) Demuéstrese que si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces sus lados opuestos son paralelos.

Respuestas

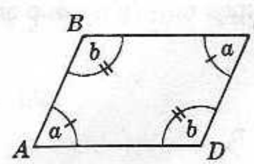
(*a*) **Dado:** $\triangle ABC$, $m\angle C = m\angle A + m\angle B$
Demuéstrese: $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.
Plan: Demuéstrese que $m\angle C = 90°$.



DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA:

Sean a = número de grados en $\angle A$
b = número de grados en $\angle B$
Entonces $a + b$ = número de grados en $\angle C$
$a + b + (a + b) = 180$ (Pr. 1)
$2a + 2b = 180$
$a + b = 90$
Como $m\angle C = 90°$, $\triangle ABC$ es $\triangle$ rectángulo.

(*b*) **Dado:** el cuadrilátero $ABCD$
$\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$
Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
Plan: Demuéstrese que los $\angle$s int. del mismo lado de la transversal son suplementarios.

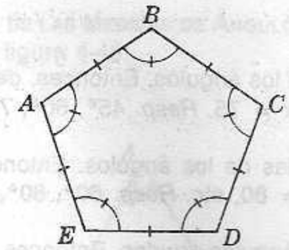


DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA:

Sean a = número de grados en $\angle A$ y $\angle C$,
b = número de grados en $\angle B$ y $\angle D$
$2a + 2b = 360$ (Pr. 3)
$a + b = 180$
Dado $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.
Dado $\angle A$ y $\angle D$ son suplementarios, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

4.4 SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS DE UN POLÍGONO

Un *polígono*, es un figura plana cerrada, acotada por segmentos de línea recta como lados. Un *n-gono* es un polígono de *n* lados. Así, un polígono de 20 lados es un 20-gono.



Pentágono regular

Fig. 4-50

Un *polígono regular*, es un polígono equilateral y equiangular. Así, un pentágono regular es un polígono que tiene cinco ángulos congruentes y cinco lados congruentes (Fig. 4-50). Un cuadrado es un polígono regular de cuatro lados.

Nombres de polígonos de acuerdo con su número de lados

Número de lados	*Polígono*	*Número de lados*	*Polígono*
3	Triángulo	8	Octágono
4	Cuadrilátero	9	Nonágono
5	Pentágono	10	Decágono
6	Hexágono	12	Dodecágono
7	Heptágono	*n*	n-gono

4.4A Suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono

Al trazar diagonales desde un vértice hasta cada uno de los otros, como en la figura 4-51, es posible dividir un polígono de siete lados en cinco triángulos. Nótese que a cada triángulo le pertenece uno de los lados del polígono, excepto por el primero y el último triángulos, los cuales tienen a dos de ellos.

$(n-2)$

$n-2$

$5-2=3$

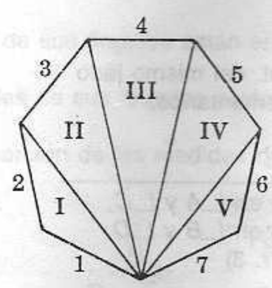


Fig. 4-51

En general, con este proceso se divide un polígono de n lados en $n-2$ triángulos; esto es, el número de triángulos es siempre el número de los lados del polígono menos 2.

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos de los triángulos. Por lo tanto:

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados $= (n-2)180°$

4.4B Suma de las medidas de los ángulos externos de un polígono

Los ángulos externos de un polígono pueden trazarse juntos de manera que tengan el mismo vértice. Para lograr esto, trace desde algún punto líneas paralelas a los lados del polígono, tal y como se muestra en la figura 4-52. Una vez hecho esto, puede observarse que sin importar el número de lados, la suma de las medidas de los ángulos externos es siempre 360°. Entonces:

La suma de los ángulos externos de un polígono de n lados $= 360°$

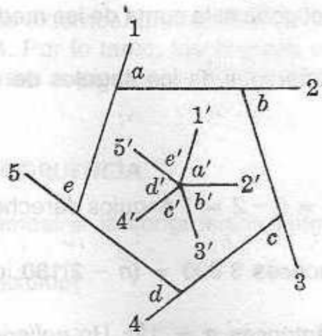


Fig. 4-52

4.4C Principios para ángulos de polígonos

Para cualquier polígono

PRINCIPIO 1: *si S es la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados, entonces*

$$S = n - 2 \text{ ángulos derechos} = (n - 2)180°$$

La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de 10 lados (decágono) es igual a 1 440°, ya que $S = 8(180) = 1\,440$.

PRINCIPIO 2: *la suma de los ángulos externos de un polígono es igual a 360°*

Por tanto, la suma de los ángulos externos de un polígono de 23 lados es de 360°.

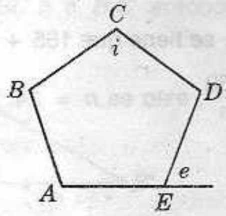
Para un polígono regular

PRINCIPIO 3: *si un polígono regular de n lados (Fig. 4-53) tiene un ángulo interno que mide i y un ángulo externo que mide e (en grados), entonces*

$$i = \frac{180(n-2)}{n} \qquad e = \frac{360}{n} \qquad \text{y} \qquad i + e = 180$$

Claramente, para un polígono regular de 20 lados:

$$i = \frac{180(20-2)}{20} = 162 \qquad e = \frac{360}{20} = 18 \qquad i + e = 162 + 18 = 180$$



Polígono regular

Fig. 4-53

PROBLEMAS RESUELTOS

4.15 Aplicación de fórmulas sobre medidas de ángulos en un polígono

(*a*) Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de 9 lados (exprese la respuesta en términos de ángulos derechos y en grados).

(*b*) Halle el número de lados de un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos internos es de 3 600°.

(*c*) ¿Es posible que la suma de las medidas de los ángulos de un polígono sea igual a 1 890°?

Respuestas

(*a*) S (en ángulos derechos) $= n - 2 = 9 - 2 = 7$ ángulos derechos; $m\angle S = (n-2)180 = 7(180) = 1\,260°$.

(*b*) S (en grados) $= (n-2)180$. Entonces $3\,600 = (n-2)180$, de donde $n = 22$.

(*c*) Dado que $1\,890 = (n-2)180$, entonces $n = 12\frac{1}{2}$. Un polígono no puede tener $12\frac{1}{2}$ lados.

4.16 Aplicación de fórmulas sobre medidas de ángulos a un polígono regular

$\frac{360}{9} = 40°$

(*a*) Calcule la medida de los ángulos externos de un polígono regular de 9 lados.

(*b*) Calcule la medida de los ángulos internos de un polígono regular de 9 lados. $\frac{180(n-2)}{n}$

$\frac{180(9-2)}{9} = \frac{180(7)}{9} = 140$

(*c*) Calcule el número de lados de un polígono regular si cada uno de sus ángulos externos mide 5°.

$5 = \frac{360}{n}$ $360 : 5 = 72$

(*d*) Calcule el número de lados de un polígono regular, si cada uno de sus ángulos internos mide 165°.

$\frac{180(n-2)}{n} = 180$ $i + e = 180$ $e + i = 180$

$i = 165$ $i = 180$

Respuestas

(*a*) Dado que $n = 9$, $m\angle e = \frac{360}{n} = \frac{360}{9} = 40$. *Resp.* 40°.

(*b*) Dado que $n = 9$, $m\angle i = \frac{(n-2)180}{n} = \frac{(9-2)180}{9} = 140$. *Resp.* 140°.
Otro método: dado que $i + e = 180$, $i = 180 - e = 180 - 40 = 140$.

(*c*) Al sustituir $e = 5$ en $e = \frac{360}{n}$, se tiene $5 = \frac{360}{n}$. Entonces $5n = 360$, esto es $n = 72$. *Resp.* 72 lados.

(*d*) Al sustituir $i = 165$ en $i + e = 180$, se tiene que $165 + e = 180$ o $e = 15$. Entonces, utilizando $e = \frac{360}{n}$ con $e = 15$, se tiene que $15 = \frac{360}{n}$, esto es $n = 24$. *Resp.* 24 lados.

4.17 Aplicación del álgebra a la suma de medidas de ángulos de un polígono

Calcule la medida de cada ángulo interno de un cuadrilátero (*a*) si sus ángulos internos se representan por $x + 10$, $2x + 20$, $3x - 50$ y $2x - 20$; (*b*) si sus ángulos externos están en proporción 2:3:4:6.

Respuestas

(*a*) Dado que las medidas de los $\angle$s internos es de 360°, sumamos:

$$(x + 10) + (2x + 20) + (3x - 50) + (2x - 20) = 360$$
$$8x - 40 = 360$$
$$x = 50$$

Entonces $x + 10 = 60$; $2x + 20 = 120$; $3x - 50 = 100$; $2x - 20 = 80$. *Resp.* 60°, 120°, 100°, 80°.

(*b*) Sean $2x$, $3x$, $4x$ y $6x$ los ángulos externos. Entonces $2x + 3x + 4x + 6x = 360$. La resolución obtenida es $15x = 360$, esto es $x = 24$. Por lo tanto, los ángulos externos miden 48°, 72°, 96° y 144°.
Los ángulos internos son sus suplementos. *Resp.* 132°, 108°, 84°, 36°.

4.5 DOS NUEVOS TEOREMAS SOBRE CONGRUENCIA

Ya se han presentado tres métodos para demostrar la congruencia entre triángulos. Éstos son:

1. s.a.s. ≅ s.a.s. (Dos lados y el ángulo incluido)
2. a.s.a. ≅ a.s.a. (Dos ángulos y el lado incluido)
3. s.s.s. ≅ s.s.s. (Tres lados)

Dos métodos adicionales para demostrar que dos triángulos son congruentes son:

4. s.a.a. ≅ s.a.a. (Dos ángulos y el lado opuesto)
5. hip.c. ≅ hip.c. (Hipotenusa y un cateto)

4.5A Dos nuevos principios de congruencia

PRINCIPIO 1: (s.a.a. ≅ s.a.a.) *si dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos de un triángulo son congruentes a las partes correspondientes de otro, entonces los triángulos son congruentes.*

Si en la figura 4-54, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $BC \cong B'C'$ entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

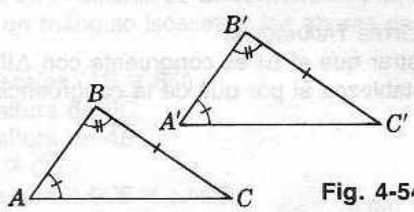


Fig. 4-54

PRINCIPIO 2: (hip.c. ≅ hip.c.) *en un triángulo rectángulo, si la hipotenusa y un cateto son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.*

En la figura 4-55, si hip. $\overline{AB} \cong$ hip. $\overline{A'B'}$ y c. $\overline{BC} \cong$ c. $\overline{B'C'}$ entonces $\triangle$ rectángulo $ABC \cong \triangle$ rectángulo $A'B'C'$.

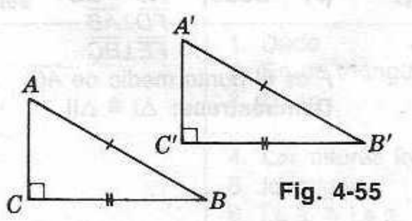


Fig. 4-55

En el capítulo 16 se da la demostración de este principio.

PROBLEMAS RESUELTOS

4.18 SELECCIÓN DE TRIÁNGULOS CONGRUENTES UTILIZANDO s.a.a. ≅ s.a.a. o hip.c. ≅ hip.c.

En (*a*) figura 4-56 y (*b*) figura 4-57, seleccione los triángulos que sean congruentes y establezca la razón de su congruencia.

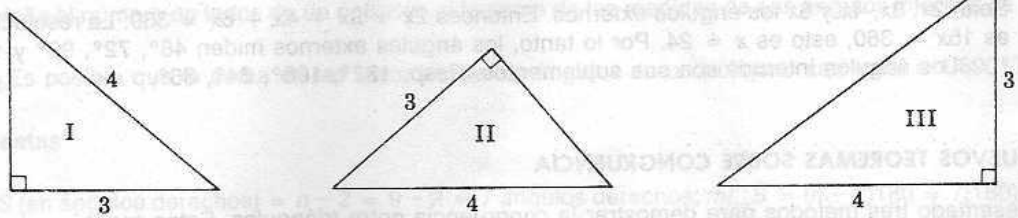


Fig. 4-56

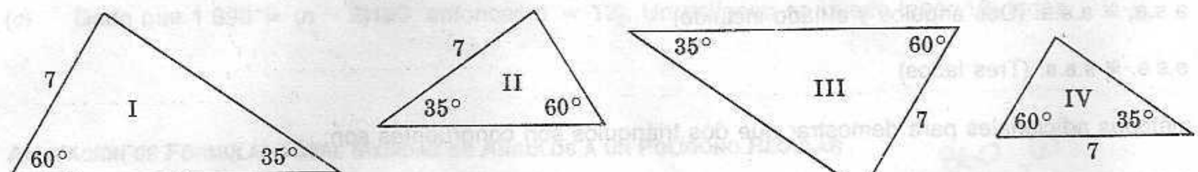


Fig. 4-57

Respuestas

(*a*) △I ≅ △II hip.c ≅ hip.c. En △III, 4 no es hipotenusa.

(*b*) △I ≅ △III por s.a.a. ≅ s.a.a. En △II, 7 es opuesto a 60° en lugar de 35°. En △IV, 7 está incluido entre 60° y 35°

4.19 DETERMINACIÓN DE LA CAUSA DE LA CONGRUENCIA ENTRE TRIÁNGULOS

En cada inciso de la figura 4-58, es posible demostrar que el △I es congruente con △II. Haga un diagrama que muestre las partes congruentes de cada triángulo y establezca el por qué de la congruencia.

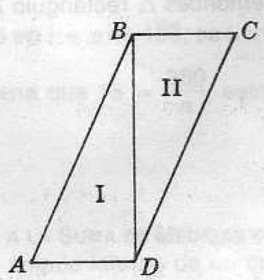
Respuestas

(*a*) En la figura 4-59(*a*), △I ≅ △II por hip.c. ≅ hip.c.

(*b*) En la figura 4-59(*b*), △I ≅ △II por s.a.a. ≅ s.a.a.

(*a*) **Dado:** $\overline{BD} \perp \overline{BC}$
$\overline{BD} \perp \overline{AD}$
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$

Demuéstrese: △I ≅ △II



(*b*) **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
$\overline{FD} \perp \overline{AB}$
$\overline{FE} \perp \overline{BC}$
F es el punto medio de $\overline{AC}$.

Demuéstrese: △I ≅ △II

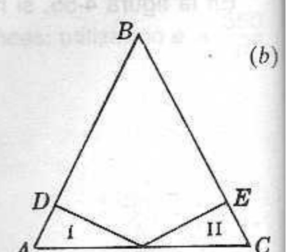


Fig. 4-58

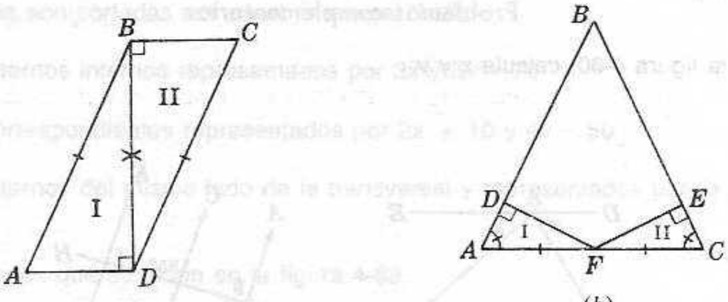
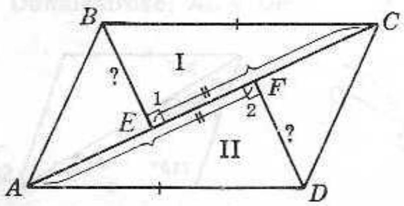


Fig. 4-59

4.20 Demostración de un Problema de Congruencia

Dado: Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$
$\overline{AE} \cong \overline{FC}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
Demuéstrese: $\overline{BE} \cong \overline{FD}$
Plan: Demuéstrese que $\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{II}$



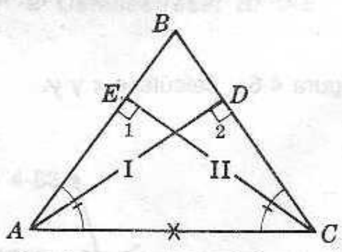
DEMOSTRACIÓN

Proposiciones	Razones
1. $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	1. Dado
2. $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$	2. Dado
3. $\angle 1 \cong \angle 2$	3. Las perpendiculares forman $\angle$s rectos y los $\angle$s rectos son congruentes.
4. $\overline{AE} \cong \overline{FC}$	4. Dado
5. $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	5. Identidad
6. $\overline{AF} \cong \overline{EC}$	6. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales. Definición de segmentos congruentes
7. $\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{II}$	7. hip.c. $\cong$ hip.c.
8. $\overline{BE} \cong \overline{FD}$	8. Partes correspondientes de $\triangle$s congruentes son congruentes.

4.21 Demostración de un Problema de Congruencia Formulado en Palabras

Demuestre que en un triángulo isósceles, las alturas de lados congruentes son congruentes.

Dado: $\triangle ABC$ isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$)
$\overline{AD}$ es la altura de $\overline{BC}$
$\overline{CE}$ es la altura de $\overline{AB}$
Demuéstrese: $\overline{AD} \cong \overline{CE}$
Plan: Demuéstrese que $\triangle ACE \cong \triangle ACD$
o $\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{II}$



DEMOSTRACIÓN

Proposiciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	1. Dado
2. $\angle A \cong \angle C$	2. En un triángulo, $\angle$s opuestos a lados iguales son iguales.
3. $\overline{AD}$ es la altura de $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ es la altura de $\overline{AB}$.	3. Dado
4. $\angle 1 \cong \angle 2$	4. Las alturas forman $\angle$s rectos con la base, $\therefore$ son congruentes.
5. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	5. Identidad
6. $\triangle \mathrm{I} \cong \triangle \mathrm{II}$	6. l.a.a. $\cong$ l.a.a.
7. $\overline{AD} \cong \overline{CE}$	7. Partes correspondientes de $\triangle$s congruentes, son congruentes.

Problemas complementarios

1. En cada inciso de la figura 4-60, calcule x y y. (4.1)

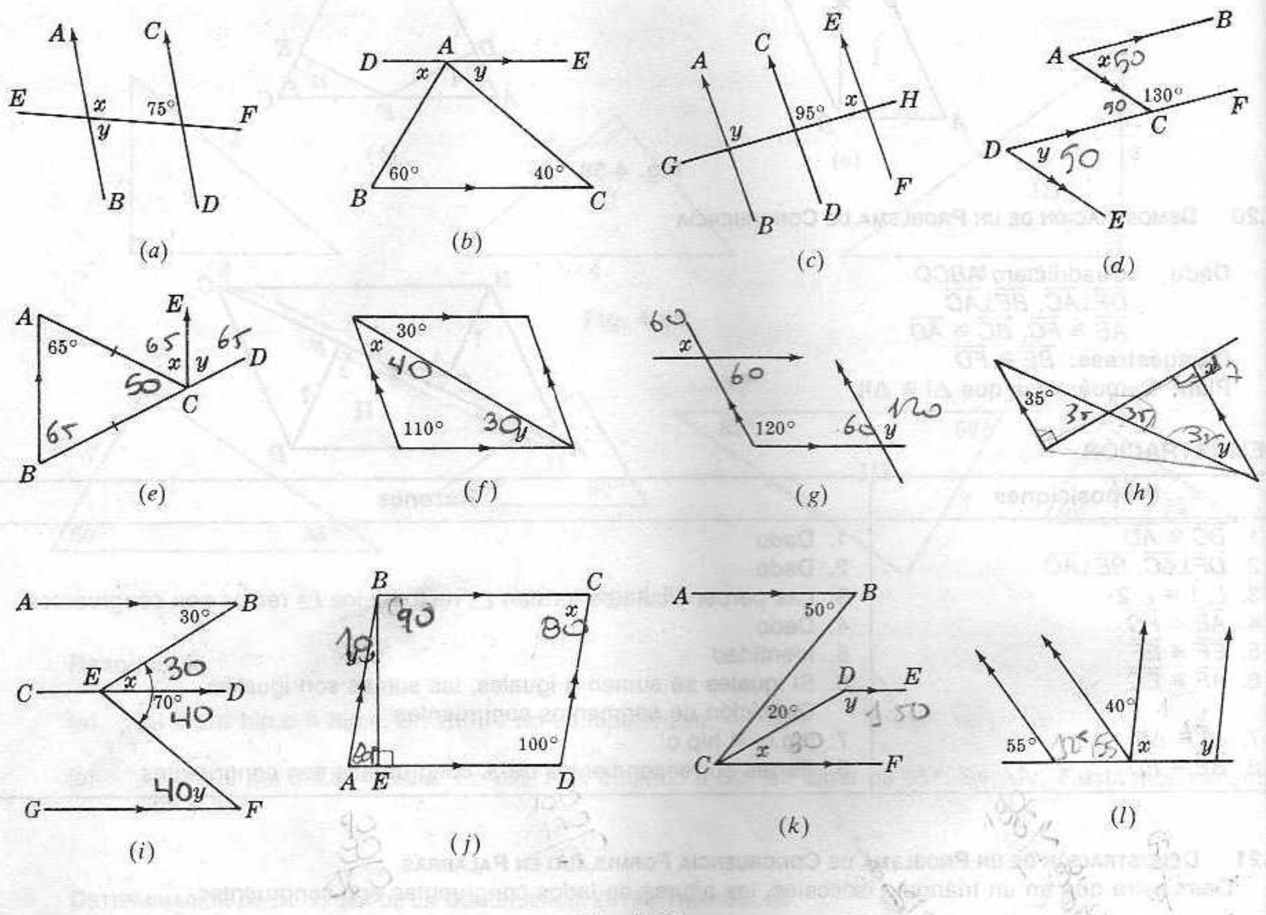


Fig. 4-60

2. En cada inciso de la figura 4-61, calcúlese x y y. (4.3)

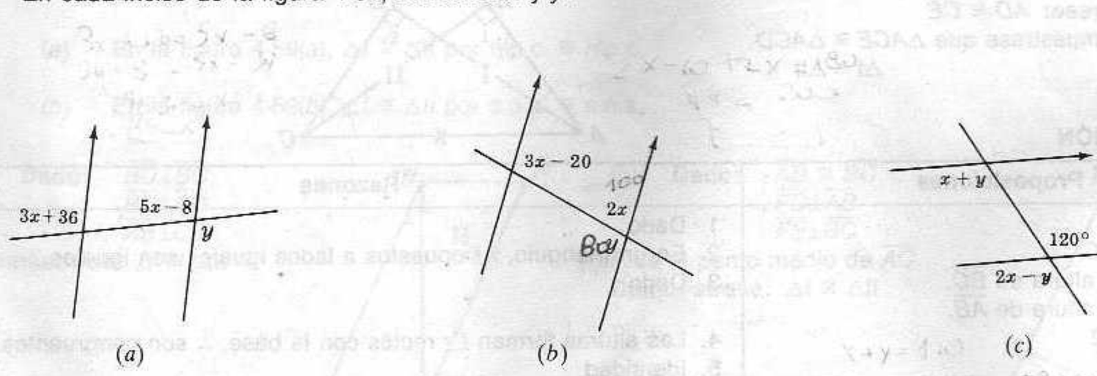


Fig. 4-61

3. Si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, halle: (4.3)

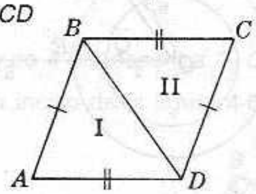
(a) Dos ángulos alternos internos representados por $3x$ y $5x - 70$

(b) Dos ángulos correspondientes representados por $2x + 10$ y $4x - 50$

(c) Dos ángulos internos del mismo lado de la transversal y representados por $2x$ y $3x$.

4. Haga las demostraciones que se piden en la figura 4-62. (4.4)

(a) **Dado:** Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$
Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$



(b) **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$
$\overline{BC} \parallel \overline{EF}$
Demuéstrese: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

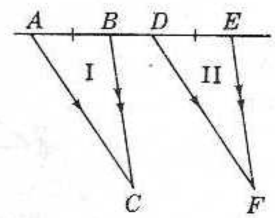
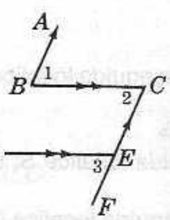


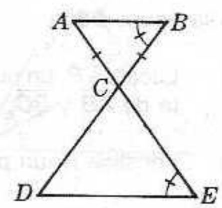
Fig. 4-62

5. Realice las demostraciones requeridas en la figura 4-63. (4.4)

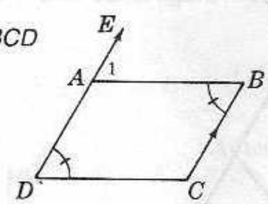
(a) **Dado:** $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$
$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$
Demuéstrese: $\angle 1 \cong \angle 3$



(b) **Dado:** $\overline{AC} \cong \overline{BC}$
$\angle B \cong \angle E$
Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$



(c) **Dado:** Cuadrilátero $ABCD$
$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
$\angle B \cong \angle D$
Demuéstrese: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



(d) **Dado:** $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$
$\overline{AE}$ bisecta $\angle A$
$\overline{BF}$ bisecta $\angle B$
Demuéstrese: $\overline{BF} \parallel \overline{AE}$

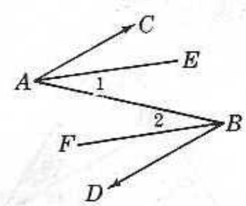


Fig. 4-63

6. Demuéstrese cada una de las siguientes proposiciones: (4.5)

(a) Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos, entonces son congruentes también.

(b) Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisectan en E, entonces $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

(c) En el cuadrilátero $ABCD$ sea $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Si las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersectan en E y $\overline{AE} \cong \overline{DE}$, entonces $\overline{BE} \cong \overline{CE}$.

(d) $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas cortadas por una transversal en E y F. Si $\overrightarrow{EG}$ y $\overrightarrow{FH}$ bisectan un par de ángulos correspondientes, entonces $\overrightarrow{EG} \parallel \overrightarrow{FH}$.

(*e*) Si una línea trazada por el vértice B del $\triangle ABC$ es paralela a $\overline{AC}$ y bisecta al ángulo formado al extender el segmento $\overline{AB}$, por B; entonces $\triangle ABC$ es isósceles.

7. En la figura 4-64 encuéntrese la distancia que hay de (*a*) A a B; (*b*) E a $\overline{AC}$; (*c*) A a $\overline{BC}$; (*d*) $\overline{ED}$ a $\overline{BC}$. (4.6)

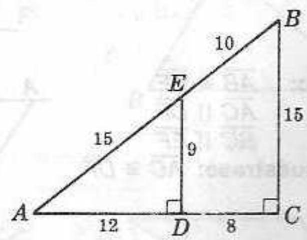


Fig. 4-64

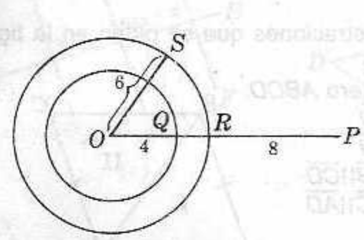


Fig. 4-65

8. En la figura 4-65 determínense las distancias (*a*) de P al círculo exterior; (*b*) de P al círculo interior; (*c*) entre los círculos concéntricos; (*d*) de P a O. (4.6)

9. En la figura 4-66:

(*a*) Localice P, un punto sobre $\overline{AD}$, equidistante de B y C. Enseguida localice Q, un punto sobre $\overline{AD}$, equidistante de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

(*b*) Localice R, un punto equidistante de A, B y C. Enseguida localice S, un punto equidistante de B, C y D.

(*c*) Localice T, un punto equidistante de $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$. Enseguida localice U, un punto equidistante de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.

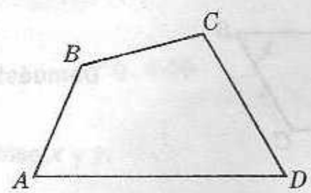


Fig. 4-66

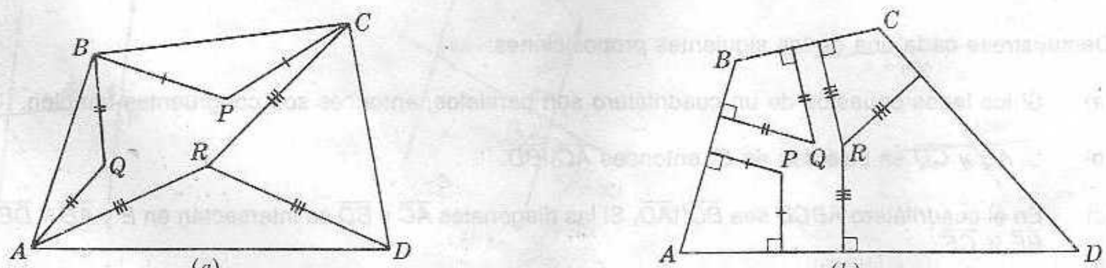
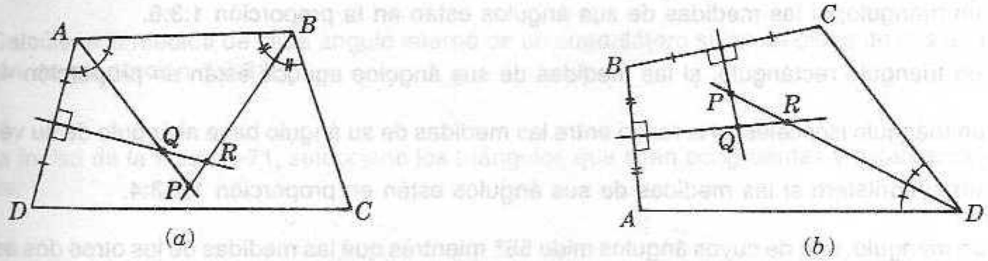


Fig. 4-67

En cada inciso de la figura 4-67, describa P, Q y R como puntos equidistantes y localícelos en un bisector.

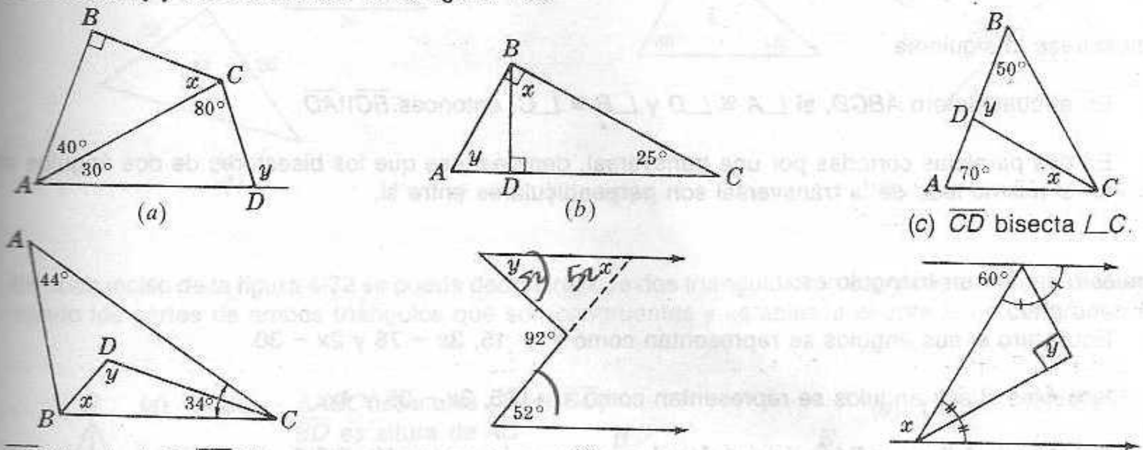


(a) (b)

Fig.4-68

En cada inciso de la figura 4-68, describa P, Q y R como puntos equidistantes. (4.9)

Calcúlese x y y en cada inciso de la figura 4-69. (4.11)

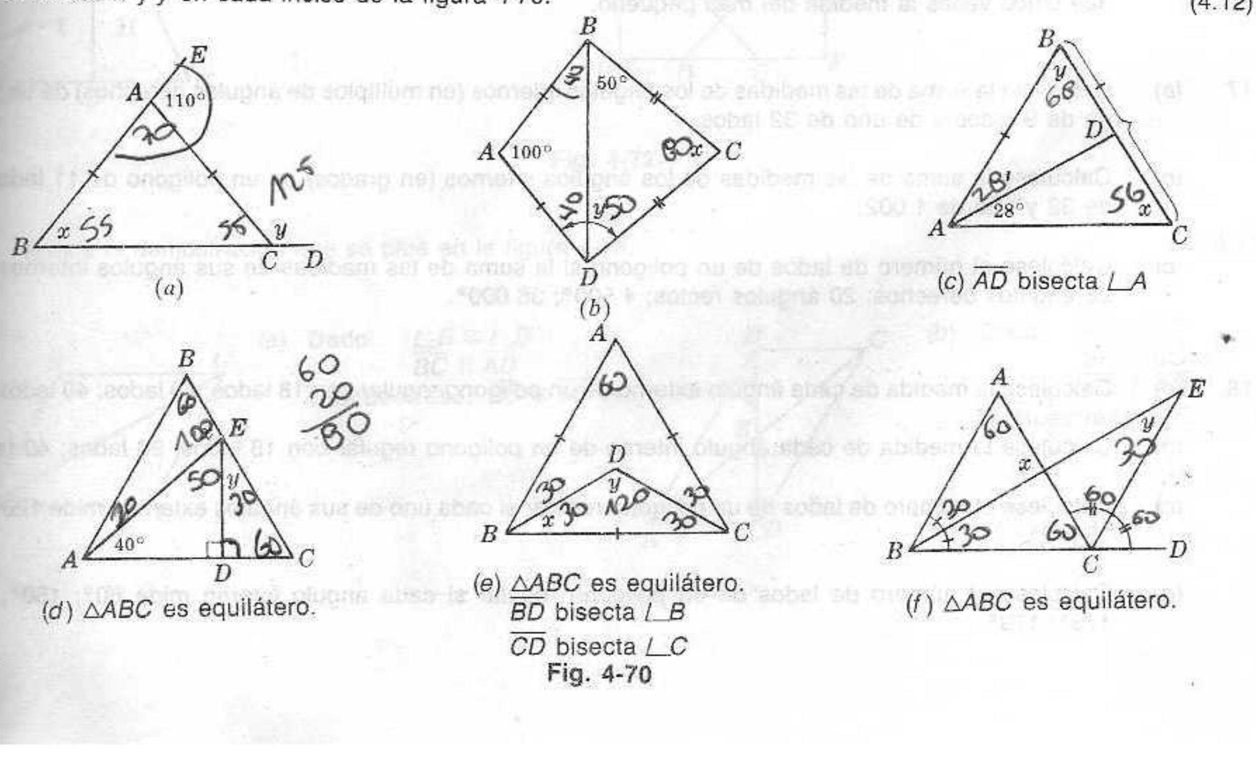


(a) (b) (c) $\overline{CD}$ bisecta $\angle C$.

(d) $\overline{BD}$ bisecta $\angle B$, $\overline{CD}$ bisecta $\angle C$ (e) (f)

Fig. 4-69

Calcúlese x y y en cada inciso de la figura 4-70. (4.12)



(a) (b) (c) $\overline{AD}$ bisecta $\angle A$

(d) $\triangle ABC$ es equilátero. (e) $\triangle ABC$ es equilátero. $\overline{BD}$ bisecta $\angle B$ $\overline{CD}$ bisecta $\angle C$ (f) $\triangle ABC$ es equilátero.

Fig. 4-70

14. Calcúlese la medida de cada ángulo. (4.1

(*a*) De un triángulo, si las medidas de sus ángulos están en la proporción 1:3:6.

(*b*) De un triángulo rectángulo, si las medidas de sus ángulos agudos están en proporción 4:5.

(*c*) De un triángulo isósceles, si la razón entre las medidas de su ángulo base al ángulo de su vértice es de 1:

(*d*) De un cuadrilátero si las medidas de sus ángulos están en proporción 1:2:3:4.

(*e*) De un triángulo, uno de cuyos ángulos mide 55° mientras que las medidas de los otros dos están en propoción 2:3.

(*f*) De un triángulo, si la razón entre las medidas de sus ángulos externos es de 2:3:4.

15. Demuéstrese lo siguiente: (4.1

(*a*) En el cuadrilátero *ABCD*, si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

(*b*) En dos paralelas cortadas por una transversal, demuéstrese que los bisectores de dos ángulos intern en el mismo lado de la transversal son perpendiculares entre sí.

16. Demuéstrese que un triángulo es:

(*a*) Equilátero si sus ángulos se representan como $x + 15$, $3x - 75$ y $2x - 30$.

(*b*) Isósceles si sus ángulos se representan como $x + 15$, $3x - 35$ y $4x$.

(*c*) Rectángulo si las medidas de sus ángulos están en la proporción 2:3:5.

(*d*) Un triángulo obtuso si uno de sus ángulos mide 64° y el más grande de los otros dos mide 10° men que cinco veces la medida del más pequeño.

17. (*a*) Calcúlese la suma de las medidas de los ángulos internos (en múltiplos de ángulos derechos) de un políg no de 9 lados y de uno de 32 lados. (4.1

(*b*) Calcúlese la suma de las medidas de los ángulos internos (en grados) de un polígono de 11 lados; un de 32 y uno de 1 002.

(*c*) Calcúlese el número de lados de un polígono si la suma de las medidas de sus ángulos internos es d 28 ángulos derechos; 20 ángulos rectos; 4 500°; 36 000°.

18. (*a*) Calcúlese la medida de cada ángulo externo de un polígono regular con 18 lados; 20 lados; 40 lados.(4.1

(*b*) Calcúlese la medida de cada ángulo interno de un polígono regular con 18 lados; 20 lados; 40 lados.

(*c*) Calcúlese el número de lados de un polígono regular si cada uno de sus ángulos externos mide 120°; 40° 18°; 2°.

(*d*) Calcúlese el número de lados de un polígono regular si cada ángulo interno mide 60°; 150°; 170° 175°; 179°.

(a) Calcúlese cada ángulo interno de un cuadrilátero si éstos se representan como $x - 5$, $x + 20$, $2x - 45$ y $2x - 30$. (4.17)

(b) Calcúlese la medida de cada ángulo interno de un cuadrilátero si las medidas de sus ángulos externos están en proporción 1:2:3:3.

En cada inciso de la figura 4-71, seleccione los triángulos que sean congruentes y establezca el criterio de congruencia. (4.18)

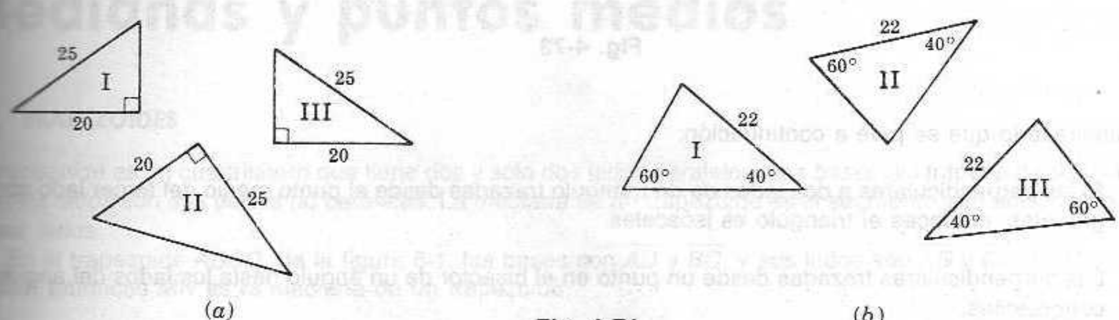
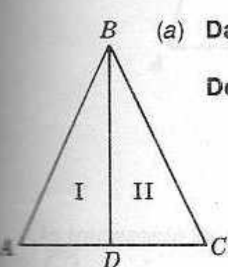
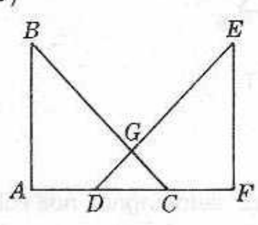


Fig. 4-71

En cada inciso de la figura 4-72 se puede demostrar que dos triángulos son congruentes. Haga un diagrama mostrando las partes de ambos triángulos que son congruentes y establezca el criterio de congruencia. (4.19)



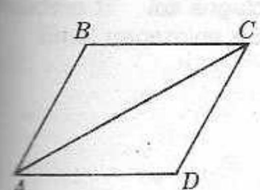
(a) **Dado:** $\triangle ABC$ isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$)
$\overline{BD}$ es altura de $\overline{AC}$
Demuéstrese: $\triangle I \cong \triangle II$.



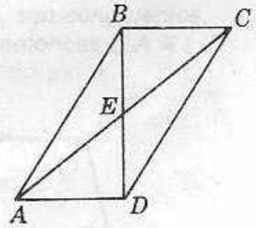
(b) **Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{EF}$
$\overline{AB} \perp \overline{AF}$, $\overline{EF} \perp \overline{AF}$
$\overline{DG} \cong \overline{GC}$
Demuéstrese: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Fig. 4-72

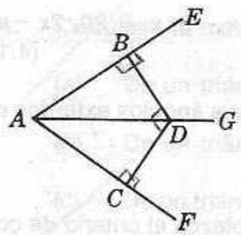
Realice la demostración que se pide en la figura 4-73. (4.20)



(a) **Dado:** $\angle B \cong \angle D$
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
Demuéstrese: $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

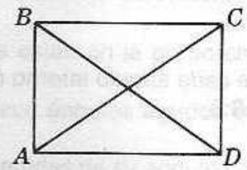


(b) **Dado:** $\overline{AE} \cong \overline{EC}$
$\overline{BD} \perp \overline{BC}$
$\overline{BD} \perp \overline{AD}$
Demuéstrese: $\overline{BE} \cong \overline{ED}$



(*c*) **Dado:** $\overline{BD} \cong \overline{DC}$
$\overline{BD} \perp \overline{AE}$
$\overline{DC} \perp \overline{AF}$

Demuéstrese: $\overline{AG}$ bisecta $\angle A$



(*d*) **Dado:** $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
$\overline{AB} \perp \overline{AD}$
$\overline{CD} \perp \overline{AD}$

Demuéstrese: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Fig. 4-73

23. Demuéstrese lo que se pide a continuación: (4.21)

(*a*) Si las perpendiculares a dos lados de un triángulo trazadas desde el punto medio del tercer lado son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

(*b*) Las perpendiculares trazadas desde un punto en el bisector de un ángulo hasta los lados del ángulo, son congruentes.

(*c*) Si las alturas a dos de los lados de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

(*d*) Dos triángulos rectos son congruentes si la hipotenusa y el ángulo agudo de uno de ellos son congruentes con las partes correspondientes del otro.